به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۲

دترمینان و وارون ماتریس، مشتق و کمترین مربعات | **تمرین تئوری پنجم** | تاریخ انتشار: ۲۶ اردیبهشت ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

سوالات (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۵ خرداد ۱۴۰۳

پرسش ۱ (۲۵ نمره) ثابت کنید که به ازای هر n ماتریس زیر وارون‌پذیر است.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 4 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

پاسخ
داریم : $A = (V_1, V_2, ..., V_n)$ که بردارهای V_i ستون‌های A هستند.
برهان خلف: فرض می‌کنیم که این بردارها وابسته خطی باشند. در این صورت به ازای ضرایبی مثل c_i خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i V_i = 0, \exists i, c_i \neq 0$$

حال اگر فقط درایه نخست هر بردار را درنظر بگیریم خواهیم داشت:
درایه اول:

$$\sum_{i=1}^{n} i c_i = 0$$

درایه دوم:

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1)c_i + nc_1 = 0 = \sum_{i=1}^{n} ic_i - \sum_{i=1}^{n} c_i + nc_1 \Longrightarrow c_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{n} = \bar{c}$$

درایه سوم:

$$\sum_{i=3}^{n}(i-2)c_i + (n-1)c_1 + nc_2 = 0 = \sum_{i=1}^{n} ic_i - 2\sum_{i=1}^{n} c_i + c_1 + (n-1)c_1 + nc_2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} ic_i - 2\sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n} c_i + nc_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{n}$$

.
.
.

درایه n ام:

$$\sum_{i=n}^{n}(i-(n-1))c_i + 2c_1 + 3c_2 + ... + nc_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} ic_i - (n-1)\sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n-1}(n-1-i)c_i + (i+1)\sum_{i=1}^{n-1} c_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-(n-1)+(n-1-i)+(i+1))c_i-(-c_n)-(n+1)c_n=$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_i-nc_n=0\Longrightarrow c_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}}{n}=\bar{c}$$

$$\Longrightarrow \forall i, c_i=\bar{c}$$

باتوجه به رابطه نخست خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{c}V_i=0 \implies \bar{c}\sum_{i=1}^{n}V_i=0 \implies \sum_{i=1}^{n}V_i=0$$

رابطه بالا به وضوح اشتباه است چراکه برای مثال درایه اول برابر با $\frac{n(n+1)}{2}$ می شود.
بنابراین فرض خلف اشتباه بوده و بردارها مستقل خطی می‌باشند؛ که نتیجه می‌دهد ماتریس A وارون‌پذیر است.

پرسش ۲ (۲۵ نمره) روی هر مجموعه ای از اعداد مختلط $(x_1,...,x_n)$ ماتریس $V_n(x_1,...,x_n)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$V_n(x_1,...,x_n)=\begin{bmatrix}1 & 1 & ... & 1\\ x_1 & x_2 & ... & x_n\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & x_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

این ماتریس، به ماتریس وندرموند[1] معروف است که روی مجموعه $(x_1,...,x_n)$ تعریف شده است. عبارت زیر را ثابت کنید:

$$\det V_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$$

پاسخ از استقرا استفاده می کنیم. ابتدا توجه کنید که اگر اعداد $(x_1,...,x_n)$ کاملا متمایز نباشند، دترمینان صفر می شود:

$$\det V_n(x_1,\dots,x_n)=0$$

برای حالت $n=2$ داریم:

$$\det V_2(x_1,x_2)=\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{bmatrix}=(x_2-x_1).$$

و $n=3$:

$$\det V_3(x_1,x_2,x_3)=\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{bmatrix}.$$

برای محاسبه این دترمینان، می توان ابتدا سطر سوم را از ضرب سطر دوم در x_1 کم کرد:

$$\det V_3(x_1,x_2,x_3)=\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ 0 & x_2^2-x_1x_2 & x_3^2-x_1x_3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3^2-x_1x_3\end{bmatrix}$$

سپس همین کار را برای سطرهای دوم و اول تکرار کرد:

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1)\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1\\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1)\end{bmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ x_2 & x_3\end{bmatrix}=$$

$$(x_2-x_1)\det V_2(x_2,x_3)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

می توان نتیجه بالا را به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\det V_2(x_1,x_2)=\prod_{1\leq i<j\leq 2}(x_j-x_i),\quad \det V_3(x_1,x_2,x_3)=\prod_{1\leq i<j\leq 3}(x_j-x_i)$$

[1] Vandermonde

در نتیجه پایه استقرا برقرار است. همچنین با روندی مشابه، می توان اثبات کرد رابطه زیر نیز برقرار است:

$$\det V_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_2 - x) \cdot \ldots \cdot (x_n - x) \cdot \det V_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

حال فرض کنید رابطه برای V_{n-1} درست می باشد. یعنی:

$$\det V_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) = \prod_{2 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

با توجه به رابطه $*$ داریم:

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1) \ldots (x_n - x_1) \cdot \prod_{2 \le i < j \le n} (x_j - x_i) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

در نتیجه حکم اثبات می شود.

پرسش ۳ (۲۵ نمره) فرض کنید A یک ماتریس فول رنک ستونی باشد.

(آ) (۱۵ نمره) اگر x_0 پاسخ حداقل مربعات $Ax = b$ باشد، عبارت زیر را برای هر بردار x ثابت کنید.

$$||Ax - b||^2 = ||Ax_0 - b||^2 + ||A(x - x_0)||^2$$

رابطه بدست آمده را برای حالتی که معادله $Ax = b$ جواب نداشته باشد به صورت هندسی تعبیر کنید.

(ب) (۱۰ نمره) Ax_0 نتیجه تصویر کردن b بر روی فضای ستونی A تحت ماتریس P می باشد. رابطه ماتریس P را بدست آورید و نشان دهید خواص ماتریس پروجکشن برای آن برقرار است.

پاسخ

(آ)

$$||Ax - b||^2 = ||Ax_0 - b + A(x - x_0)||^2 = ||Ax_0 - b||^2 + ||A(x - x_0)||^2 + 2(x - x_0)^T A^T (Ax_0 - b)$$

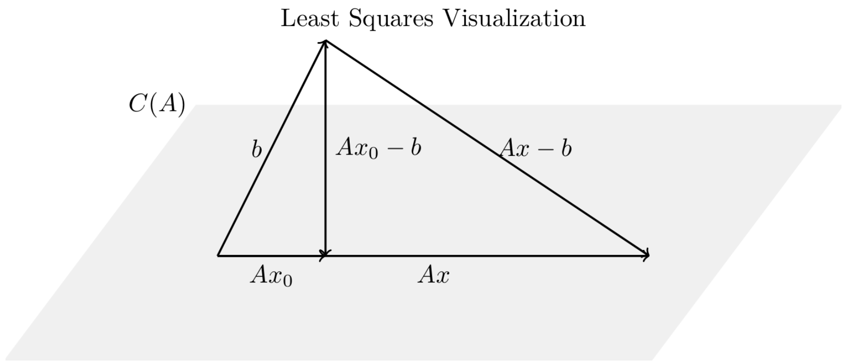
$$\Longrightarrow ||Ax - b||^2 - ||Ax_0 - b||^2 - ||A(x - x_0)||^2 = 2(x - x_0)^T (A^T A x_0 - A^T b)$$

$$x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b \Longrightarrow ||Ax - b||^2 - ||Ax_0 - b||^2 - ||A(x - x_0)||^2 = 0 \Longrightarrow ||Ax - b||^2 = ||Ax_0 - b||^2 + ||A(x - x_0)||^2$$

اگر دقت کنید متوجه می شوید که بردار های Ax_0 و $Ax_0 - b$ بر یکدیگر عمودند چرا که:

$$(Ax_0)^T (Ax_0 - b) = x_0^T (A^T A x_0 - A^T b) = 0$$

حال با رسم بردار های $A(x - x_0)$ و $Ax - b$ و $Ax_0 - b$ متوجه می شوید که این سه بردار تشکیل مثلث قائم الزاویه می دهند. بنابراین رابطه فیثاغورث برای طول اضلاع این مثلث برقرار است.



(ب)

$$Ax_0 = A(A^T A)^{-1} A^T b = Pb \Longrightarrow P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

$$P^2 = A(A^T A)^{-1} A^T A (A^T A)^{-1} A^T = A(A^T A)^{-1} A^T = P$$

$$P^T = (A^T)^T ((A^T A)^{-1})^T A^T = A((A^T A)^T)^{-1} A^T = A(A^T A)^{-1} A^T = P$$

پرسش ۴ (۲۵ نمره)

فرض کنید X و A ماتریس های وارون پذیر و n یک عدد طبیعی باشد . روابط زیر را اثبات کنید. (در نمایش Numerator)

(آ) (۱۰ نمره)

$$\frac{\partial det(X^n)}{\partial X} = n det(X^n) X^{-1}$$

(ب) (۱۵ نمره)

$$\frac{\partial detA(t)}{\partial t} = detA(t)tr(A(t)^{-1}\frac{\partial A(t)}{\partial t})$$

پاسخ

(آ)

$$det(X^n) = det(X)^n \Longrightarrow \frac{\partial det(X^n)}{\partial X} = \frac{\partial det(X)^n}{\partial det(X)}\frac{\partial det(X)}{\partial X} = ndet(X)^{n-1}\frac{\partial det(X)}{\partial X}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \Longrightarrow det(X) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik}C_{ik} \Longrightarrow \frac{\partial det(X)}{\partial X_{ij}} = C_{ij}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial det(X)}{\partial X} = [\frac{\partial det(X)}{\partial X_{ji}}] = [C_{ji}] = C^T = adj(X) = det(X)X^{-1}$$

$$\frac{\partial det(X^n)}{\partial X} = ndet(X)^n X^{-1} = ndet(X^n)X^{-1}$$

(ب) طبق بخش قبل داریم :

$$\frac{\partial detA}{\partial A_{ij}} = adj^T(A)_{ij}$$

همینطور برای هر ماتریس A, B داریم:

$$tr(A^T B) = \sum_i \sum_j A_{ij}B_{ij}$$

$$\frac{\partial detA(t)}{\partial t} = \sum_i \sum_j \frac{\partial detA}{\partial A_{ij}}\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} = \sum_i \sum_j adj^T(A)_{ij}\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} = tr(adj(A)\frac{\partial A(t)}{\partial t})$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial detA(t)}{\partial t} = tr(adj(A)\frac{\partial A(t)}{\partial t}) = tr(detA(t)A(t)^{-1}\frac{\partial A(t)}{\partial t}) = detA(t)tr(A(t)^{-1}\frac{\partial A(t)}{\partial t})$$